第三章　线性方程组

王征宇

南京大学数学系

线性方程组的等价表示

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ \hline x_1 \cdot \alpha_1 \qquad x_2 \cdot \alpha_2 \qquad\qquad x_n \cdot \alpha_n \qquad b \end{array}\right.$$

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 未知

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ 系数矩阵

$(A\ b)_{m\times(n+1)}$ 增广矩阵

$Ax = 0/b \neq 0$ 齐次/非齐次

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) \\ \alpha_1 \qquad \alpha_2 \qquad \cdots \qquad \alpha_n \end{array} \begin{array}{c} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{array} \qquad \begin{array}{l} \beta_1^T x = b_1 \\ \beta_2^T x = b_2 \\ \vdots \\ \beta_m^T x = b_m \end{array}$$

$\beta_i^T x = b_i$ “平面”

$\beta_i \neq 0, \gamma_i \in$ 平面

$\beta_i^T(x - \gamma_i) = 0$

β_i “平面” 法向量

$$b = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

- $Ax = b$ 有解当且仅当b 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出。

线性方程组解的存在性

$$\underbrace{\overbrace{\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\} = \mathcal{S}}^{r(\mathcal{S})=r(A)=r} \supseteq \mathcal{T} = \overbrace{\{\alpha_{j_1},\ \alpha_{j_2},\ \cdots,\ \alpha_{j_r}\}}^{\text{极大无关组}}}_{Ax=b\text{有解} \quad \Leftrightarrow \quad b\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性表出} \quad \Leftrightarrow \quad b\text{可由}\alpha_{j_1},\ \alpha_{j_2},\ \cdots,\ \alpha_{j_r}\text{线性表出}} \text{ 与}\mathcal{S}\text{相互表出}$$

- $Ax = b$ 有解当且仅当 $r(A\ b) = r(A)$;

$$\underbrace{\overbrace{\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,\ b\} = \mathcal{S}'}^{\alpha_j,\ b\text{可由}\mathcal{T}\text{表出}}}_{b\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{表出}} \supseteq \mathcal{T} = \underbrace{\overbrace{\{\alpha_{j_1},\ \alpha_{j_2},\ \cdots,\ \alpha_{j_r}\}}^{\mathcal{S}'\text{的极大线性无关组}}}_{r(A\ \ b)=r}$$

$$\underbrace{\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,\ b\} = \mathcal{S}'}_{b\text{不可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{表出}} \supseteq \mathcal{T} = \underbrace{\overbrace{\{\alpha_{j_1},\ \alpha_{j_2},\ \cdots,\ \alpha_{j_r},\ b\}}^{\mathcal{S}'\text{的极大线性无关组}}}_{r(A\ \ b)=r+1}$$

线性方程组解的唯一性

- $Ax=b$ 有唯一解当且仅当 $r(A\ b)=r(A)=n$ ($r(A)=n$ 等价于 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 线性无关)。

$$\begin{aligned} b &= x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n, \quad \overbrace{c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n}^{c_1,c_2,\cdots,c_n\text{不全为 0}}=0 \\ &= y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_n\alpha_n, \quad \text{必有乘子}y_i=x_i+c_i\neq x_i \end{aligned}$$

$$R(A)=span\left\{\underbrace{\overbrace{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n}^{\text{向量组}\mathcal{S}}}_{A=(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)\in\mathbb{R}^{m\times n}}\right\} \ \mathcal{S}\text{张成的向量集合(空间)}$$

$$=\{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n|\ x_i\in\mathbb{R}\}=\{Ax|\ x\in\mathbb{R}\}\ \text{矩阵的像空间}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \underbrace{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n}_{\alpha,\ \beta\in span\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\}} \qquad \lambda\alpha+\mu\beta = \sum_{j=1}^{n}(\lambda x_j+\mu y_j)\alpha_j \\ \beta &= \overbrace{y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_n\alpha_n} \qquad \text{封闭!} \quad \in span\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\} \end{aligned}$$

线性方程组解的存在唯一性（续）

$$\overbrace{\mathcal{S} = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}}^{A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)} \qquad \overbrace{\mathcal{T} = \{\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_m\}}^{B=(\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_m)}$$

- $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ 可由 $\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n$ 表出（$A = BC_{m\times n}$），当且仅当 $span\{\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n\} \subseteq span\{\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n\}$；
- $\alpha_{j_1},\ \alpha_{j_2},\ \cdots,\ \alpha_{j_r}$ 是 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ 极大线性无关组，则 $span\{\alpha_{j_1},\ \alpha_{j_2},\ \cdots,\ \alpha_{j_r}\} = span\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$；
- $Ax = b$ 有解，当且仅当 $b \in span\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$；
- $Ax = b$ 有唯一解，当且仅当 $b \in span\{\underbrace{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n}_{\text{线性无关}}\}$；

$$\overbrace{\{x|\ Ax = b\}}^{\text{解集}}\ \text{结构？}$$

$$\underbrace{\overbrace{\{x|\ Ax = b\} \ == \ \{x|\ Bx = c\}}^{A_{m\times n}\text{满矩阵、大矩阵，}\ B_{k\times n}\text{简单？}}}_{Ax=b\text{与}Bx=c\text{同解}}$$

初等行变换与 Gauss 消去法（无解情形）

$$\underbrace{(A\ b)\ \overset{\text{有限次}}{\longrightarrow}\ \cdots\ \overset{\text{行变换}}{\longrightarrow}}_{\text{对应初等矩阵}P_i(1\le i\le k)}\ (A'\ b') = \underbrace{\overbrace{P_k\cdots P_2P_1}^{=P\text{可逆}}(A\ b)}_{(PA\ \ Pb)} \qquad \begin{aligned} A' &= PA \\ b' &= Pb \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{array}{llll} Ax=b & \Rightarrow & PAx=Pb & \{x|\ Ax=b\} \subseteq \{x|A'x=b'\} \\ A'x=b' & \Rightarrow & P^{-1}A'x=P^{-1}b' & \{x|\ A'x=b'\} \subseteq \{x|Ax=b\} \end{array}}_{Ax=b\text{与}A'x=b'\text{同解，}r(A)=r(A')\text{，}r(A\ \ b)=r(A'\ \ b')}$$

令 A' 是行简化梯形阵，有 r 个“主 1”，$(1,j_1),(2,j_2),\cdots,(r,j_r)$

(1) $r(A)=r$，$r(A\ b)=r+1$，则 $r(A')=r$，$r(A'\ b')=r+1$；

$$b'=(b'_1,\cdots,b'_r,\underbrace{b'_{r+1},\cdots,b'_m}_{\text{不全为 0，}})^T \qquad \underbrace{b'_{r+1}=\cdots=b'_m=0}_{r(A'\ \ b')=r=(A')\text{矛盾}}$$

$$\underbrace{0\cdot x_1+0\cdot x_2+\cdots+0\cdot x_n}_{A'\text{第}j\text{(零）行}} = b'_j\ (j>r) \quad (A'x=b'\text{第}j\text{个方程，矛盾})$$

初等行变换与 Gauss 消去法（续，无穷多解情形）

（2） $r(A) = r(A\ b) < n$，则 $r(A') = r(A'\ b') = r < n$，

$$\overbrace{r(A)}^{r(A')} = \overbrace{r(A\ b)}^{r(A'\ b')} = r < n, \quad \overbrace{b' = (b'_1, \cdots, b'_r, 0, \cdots, 0)^T}^{(A'\ b')\text{也是行简化矩阵！}}$$

$$(A'\ b') = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline e_1 & e_2 & \cdots & e_r & \alpha'_{r+1} & \cdots & \alpha'_n & b' \end{array}\right)$$

最后一列无主 1

非自由未知量：$x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$

非自由未知量放在左端，自由未知量移至右端

$\underbrace{\text{一般解：}}_{\text{无穷多}}$ $$（非自由）x_{j_k} = b'_k - \sum_{j \neq j_1, \cdots, j_r} a'_{kj} x_j \text{（自由）} \quad (1 \le k \le r)$$

初等行变换与 Gauss 消去法（续，唯一解情形）

(3) $r(A) = r(A\ b) = n$，则 $r(A') = r(A'\ b') = n$，A' 行简化，则 $(A'\ b')$ 也行简化；

$$(A'\ b') = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline e_1 & e_2 & \cdots & e_n & b' \end{array}\right)$$

最后一列无主 1

非自由未知量：$x_1, x_2, \cdots, x_n$

非自由未知量放在左端，没有自由未知量

$Ax = b$ 有唯一解，$x = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_n)^T$；（$b'$ 的前 n 个分量，$m \geq n$）

行变换求解齐次方程

$$\underbrace{A(\overbrace{c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_k\alpha_k}^{A\alpha_j=0,\ 1\le j\ lek})=c_1\overbrace{A\alpha_1}^{=0}+c_2\overbrace{A\alpha_2}^{=0}+\cdots+c_k\overbrace{A\alpha_k}^{=0}=0}_{\alpha=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_k\alpha_k\text{也是}Ax=0\text{的解，齐次方程解的线性组合还是解}}$$

$$A\ \underbrace{\xrightarrow{\text{有限次}}\cdots\xrightarrow{\text{行变换}}}_{\text{对应初等矩阵}P_i(1\le i\le k)}\ A'=\underbrace{\overbrace{P_k\cdots P_2P_1}^{=P\text{可逆}}A}_{PA}\qquad \begin{aligned}A'&=PA\\A&=P^{-1}A'\end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{array}{lcll}Ax=0 & \Rightarrow & PAx=0 & \{x|\ Ax=0\}\subseteq\{x|A'x=0\}\\ A'x=0 & \Rightarrow & P^{-1}A'x=0 & \{x|\ A'x=0\}\subseteq\{x|Ax=0\}\end{array}}_{Ax=0\text{与}A'x=0\text{同解，}r(A)=r(A'),\ A\xrightarrow{r}A'\ \Rightarrow\ N(A)=N(A')}$$

- $Ax=0$ 的解空间 $N(A)=K(A)=\{x|\ Ax=0\}$（零空间、核），关于加法、数乘封闭；行变换不改变零空间。

行变换求解齐次方程（续，分量形式的一般解）

- $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$r(A)=n$，$Ax=0$ 只有零解。

$\underbrace{A \xrightarrow{r} A'\text{行简化梯形阵},}_{r(A)=r(A')=r<n}$ $\underbrace{1\le j_1<j_2<\cdots<j_r\le n}_{\text{“主 1” 的列指标}}$ $Ax=0$ 解无穷！

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline e_1 & e_2 & \cdots & e_r & \alpha'_{r+1} & \cdots & \alpha'_n \end{pmatrix}$$

非自由未知量：
$x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_r}$
假定$j_1=1,\cdots,j_r=r$

非自由未知量
放在左端，自由
未知量移至右端

$\underbrace{\text{一般解:}}_{\text{无穷多}}$ （非自由）$x_{j_k}=-\sum\limits_{j\neq j_1,\cdots,j_r} a'_{kj}x_j$（自由）$(1\le k\le r)$

行变换求解齐次方程（续，向量形式的一般解）

- $A=(a_{ij})_{m\times n}\xrightarrow{r}A'$ 行简化梯形阵，$r(A)=r<n$，

假定 $j_1=1,\cdots,j_r=r$，一般解可表示为

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & = & -a'_{1,r+1}x_{r+1} & -a_{1,r+2}x_{r+2} & \cdots & -a'_{1n}x_n & \\
x_2 & = & -a'_{2,r+1}x_{r+1} & -a'_{2,r+2}x_{r+2} & \cdots & -a'_{2n}x_n & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\
x_r & = & -a'_{r,r+1}x_{r+1} & -a'_{r,r+2}x_{r+2} & \cdots & -a'_{rn}x_n & \text{分量形式} \\
x_{r+1} & = & +1\cdot x_{r+1} & +0\cdot x_{r+2} & \cdots & +0\cdot x_n & \\
x_{r+2} & = & +0\cdot x_{r+1} & +1\cdot x_{r+2} & \cdots & +0\cdot x_n & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\
x_n & = & +0\cdot x_{r+1} & +0\cdot x_{r+2} & \cdots & +1\cdot x_n & \\
\hline
x & = & +\eta_1\cdot x_{r+1} & \eta_2\cdot x_{r+2} & \cdots & +\eta_{n-r}\cdot x_n & \text{向量形式}
\end{array}
$$

行变换求解齐次方程（续，向量形式的一般解）

- $A=(a_{ij})_{m\times n}\xrightarrow{r}A'$ 行简化梯形阵，$r(A)=r<n$：

假定 $j_1=1,\cdots,j_r=r$，一般解 $\underbrace{x_{r+1}\eta_1+x_{r+2}\eta_2+\cdots+x_n\eta_{n-r}}$

x_{r+1}，x_{r+2}，x_n 自由未知量，自由赋值

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-a'_{1,r+1}\\-a'_{2,r+1}\\\vdots\\-a'_{r,r+1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \eta_2=\begin{pmatrix}-a'_{1,r+2}\\-a'_{2,r+2}\\\vdots\\-a'_{r,r+2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \eta_{n-r}=\begin{pmatrix}-a'_{1n}\\-a'_{2n}\\\vdots\\-a'_{rn}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

线性无关，均为解

$$0=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}=(\underbrace{*,*,\cdots,*}_{\text{前}r\text{个分量}},\underbrace{c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}}_{\text{均为}0})^T$$

行变换求解齐次方程（续，向量形式的一般解）

- $A=(a_{ij})_{m\times n}\xrightarrow{r}A'$ 行简化梯形阵，$r(A)=r<n$，

一般情况（不假定 $j_1=1,\cdots,j_r=r$）：

$$\overbrace{x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_r}}^{\text{非自由未知量}},\qquad \overbrace{x_j\quad(j\notin\{j_1,j_2,\cdots,j_r\})}^{\text{自由未知量，}n-r\text{个}}$$

A' 行简化梯形阵，$A'x=0$ 第 k 个方程（$1\le k\le r$）：

$$\overbrace{\sum_{j\in\{j_1,\cdots,j_r\}}a'_{kj}x_j}^{=x_{j_k}}+\sum_{j\notin\{j_1,\cdots,j_r\}}a'_{kj}x_j=\underbrace{a'_{k1}x_1+a'_{k2}x_2+\cdots+a'_{kn}x_n=0}_{k>r\text{，零行，对应恒等式}0=0\text{，省略}}$$

$$\underbrace{x_{j_k}=-\sum_{j\neq j_1,\cdots,j_r}a'_{kj}x_j\quad(1\le k\le r),\quad r(\text{个方程})}_{\text{方程组}}\quad\longleftarrow$$

$$\underbrace{\begin{array}{l}\text{令某一个自由未知量}x_j\text{为}1\\\text{令其余}(n-r-1)\text{个自由未知量为}0\\\text{代入方程可得一个}\eta_i\ (1\le i\le n-r)\end{array}}_{\text{可重复}n-r\text{次，每次赋值得到一个解}}$$

行变换求解齐次方程（续，基本解组/基础解系）

▶ $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$A\xrightarrow{r}A'$ 行简化梯形阵，$r(A)=r<n$，

$$\underbrace{x_{j_k}=-\sum_{j\neq j_1,\cdots,j_r}a'_{kj}x_j \quad (1\le k\le r),\quad r(\text{个方程})}_{\text{方程组}} \leftarrow \underbrace{\begin{array}{l}\text{令某一个自由未知量}x_j\text{为}1\\ \text{令其余}(n-r-1)\text{个自由未知量为}0\\ \text{代入方程可得一个}\eta_i\ (1\le i\le n-r)\end{array}}_{\text{可重复}n-r\text{次，每次赋值得到一个解}}$$

可以找到：$\overbrace{\underbrace{\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_{n-r},}_{A'\eta_j=0\ \Rightarrow\ A\eta_j=0}}^{\text{线性无关}}$ $\overbrace{\underbrace{\alpha=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}}_{A\alpha=0,\ Ax=0\text{的任意解可如上表出，通解}}}^{A'\alpha=0,\ A'x=0\text{的任意解可如下表出}}$

$Ax=0$ 的一组线性无关的解 $\mathcal{S}=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}$ 称为 $Ax=0$ 的一个基本解组/基础解系，如果 $Ax=0$ 任意解可由 $\mathcal{S}$ 表出。

$$\begin{aligned}(\eta_1\ \eta_2\ \cdots\ \eta_{n-r}) &= (\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_k)C_{k\times(n-r)} && k=n-r\ ?\\ (\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_k) &= (\eta_1\ \eta_2\ \cdots\ \eta_{n-r})D_{(n-r)\times k} && D=C^{-1}\ ?\\ \text{基本解组} &= (\eta_1\ \eta_2\ \cdots\ \eta_{n-r})X && X\ \text{任意可逆}\ ?\end{aligned}$$

非齐次线性方程解的结构

- $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$r(A)\neq r(A\ b)$，$Ax=b$ 无解；
- $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$r(A)=r(A\ b)=n$，$Ax=b$ 有唯一解；
- $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$r(A)=r(A\ b)=r<n$，$Ax=b$ 有无穷多解：

$$A\eta_0=b,\quad \overbrace{\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_{n-r}}^{Ax=0\text{的基本解组}} \Rightarrow \overbrace{\underbrace{A\beta=b,\ A(\beta-\eta_0)=b-b=0}_{\beta-\eta_0\ \text{是}\ Ax=0\text{（导出组）的解}}}^{\beta\ \text{是}Ax=b\ \text{任意解}\ \Rightarrow}$$

$$A\alpha=0,\ A(\underbrace{\alpha+\eta_0}_{=\beta})=b \qquad \underbrace{\eta_0+\overbrace{c_1\eta_1+c_2\eta 2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}}^{Ax=0\ \text{通解}}}_{Ax=b\ \text{通解}}$$

计算 $Ax=b$ 通解：（1）$(A\ b)\xrightarrow{r}(A'\ b')$（行简化梯形阵）；（2）分辨“主 1”，从而分辨自由未知量；（3）自由未知量赋值计算 $Ax=0$ 的基础解系与 $Ax=b$ 的一个特解。

非齐次线性方程解的结构（续，计算）

$$(A'\ b') = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline e_1 & e_2 & \cdots & e_r & \alpha'_{r+1} & \cdots & \alpha'_n & b' \end{array}\right)$$

最后一列无主 1

非自由未知量：

$x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$

非自由未知量放在左端，自由未知量移至右端

特解 η_0 $\leftarrow$ $\underbrace{\overbrace{x_{j_k} = b'_k - \sum_{j\neq j_1,\cdots,j_r} a'_{kj}x_j}^{1\le k\le r,\ A'x=b'\ \text{前}r\text{个方程}}}_{\text{自由未知量均赋0}}$

$\underbrace{\overbrace{x_{j_k} = -\sum_{j\neq j_1,\cdots,j_r} a'_{kj}x_j}^{1\le k\le r,\ A'x=0\ \text{前}r\text{个方程}}}_{\text{一个自由未知量为 1，其余为 0}}$ $\leftarrow$ 基础解系

非齐次线性方程解的结构（续，例子）

$$
(A'\ b') = \left(\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \alpha_4' & \alpha_5' & \alpha_6' & \alpha_7' & b' \\
 & e_1 & e_2 & & e_3 & & e_4 &
\end{array}\right)
$$

非自由未知量：x_2, x_3, x_5, x_7 放在左端，

自由未知量：x_1, x_4, x_6 移至右端

$$
\underbrace{\begin{aligned}
x_2 + x_4 + 4x_6 &= -1 \\
x_3 + 9x_4 + x_6 &= 0 \\
x_5 - x_6 &= 5 \\
x_7 &= -2
\end{aligned}}_{A'x=b'\text{的前 4 个方程}}
\quad
\underbrace{\begin{aligned}
x_2 &= -1 - x_4 - 4x_6 \\
x_3 &= 0 - 9x_4 - x_6 \\
x_5 &= 5 + x_6 \\
x_7 &= -2
\end{aligned}}_{Ax=b\text{的一般解/通解}}
\quad
\underbrace{\begin{aligned}
&\text{赋值} x_1 = x_4 = x_6 = 0 \\
&\text{计算} x_2 = -1, x_3 = 0 \\
&\text{计算} x_5 = 5, x_7 = -2 \\
&(0, -1, 0, 0, 5, 0, -2)^T
\end{aligned}}_{=\eta_0 \quad Ax=b\text{的特解}}
$$

非齐次线性方程解的结构（续，例子）

$$A' = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \alpha_4' & \alpha_5' & \alpha_6' & \alpha_7' \\ & e_1 & e_2 & & e_3 & & e_4 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{aligned} & x_2 + x_4 + 4x_6 = 0 \\ & x_3 + 9x_4 + x_6 = 0 \\ & x_5 - x_6 = 0 \\ & x_7 = 0 \end{aligned}}_{A'x=0\text{的前 4 个方程}}$$

非自由未知量x_2, x_3, x_5, x_7放在左端，自由未知量x_1, x_4, x_6移至右端

$$\underbrace{\begin{aligned} & x_2 = -x_4 - 4x_6 \\ & x_3 = -9x_4 - x_6 \\ & x_5 = x_6 \\ & x_7 = 0 \end{aligned}}_{Ax=0\text{的一般解/通解}}$$

$x_1 := 1, x_4 := 0, x_6 := 0$ $\quad x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = 0$

$x_1 := 0, x_1 := 1, x_6 := 0$ $\quad \begin{cases} x_2 = -1, x_3 = -9 \\ x_5 = x_7 = 0 \end{cases}$

$x_1 := 0, x_4 := 0, x_6 := 1$ $\quad \begin{cases} x_2 = -4, x_3 = -1 \\ x_5 = 1, x_7 = 0 \end{cases}$

非齐次线性方程解的结构（续，例子）

$$x_1 := 1, x_4 := 0, x_6 := 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (1,0,0,0,0,0,0)^T = \eta_1$$

$$x_1 := 0, x_4 := 1, x_6 := 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1, x_3 = -9, x_5 = x_7 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (0,-1,-9,1,0,0,0)^T = \eta_2$$

$$x_1 := 0, x_4 := 0, x_6 := 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -4, x_3 = -1, x_5 = 1, x_7 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (0,-4,-1,0,1,1,0)^T = \eta_3$$

- $Ax = 0$ 的基础解系 η_1, η_2, η_3，通解 $c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3$；

  $$N(A) = \{x \mid Ax = 0\} = \{c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}\}$$

- $Ax = b$ 的通解 $c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3 + \eta_0$。