第四章　矩阵的特征值与特征向量

王征宇

南京大学数学系

相似矩阵定义

定义 称 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 为相似矩阵，如果存在可逆（相似变换矩阵）P 使得 $B=P^{-1}AP$，记 $A\sim B$。

相似关系是“等价关系“

- 自反性：$A\sim A$ $(A=E^{-1}AE)$
- 对称性：$A\sim B$，则 $B\sim A$：

$$B=P^{-1}AP \quad \Rightarrow \quad (P^{-1})^{-1}BP^{-1}=A$$

- 传递性：$A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$：

$$\begin{aligned} A\sim B,\ B\sim C \quad &\Rightarrow \quad B=P_1^{-1}AP_1,\ C=P_2^{-1}BP_2 \\ &\Rightarrow \quad C=P_2^{-1}(\underbrace{P_1^{-1}AP_1}_{B})P_2=\underbrace{(P_1P_2)^{-1}}_{=P^{-1}}B(\underbrace{P_1P_2}_{=:P}) \end{aligned}$$

相似矩阵性质

$A \sim B$：存在可逆（相似变换矩阵）P 使得 $B = P^{-1}AP$，则

- $A^k \sim B^k$，$cA \sim cB$（c 是数）：

$$B^k = (P^{-1}A\underbrace{P)(P^{-1}}_{=E}A\underbrace{P)\cdots}_{=E}\underbrace{\cdots(P^{-1}}_{=E}A\underbrace{P)(P^{-1}}_{=E}AP) = P^{-1}A^kP$$

- $f(t) = c_0 + c_1t + \cdots + c_kt^k$，$f(A) \sim f(B)$：

$$\underbrace{c_0E + c_1B + \cdots + c_kB^k}_{=f(B)} = \underbrace{c_0\overbrace{P^{-1}P}^{=E} + c_1P^{-1}AP + \cdots + c_k\overbrace{(P^{-1}AP)^k}^{=P^{-1}A^kP}}_{P^{-1}(c_0E+c_1A+\cdots+c_kA^k)P=P^{-1}f(A)P}$$

相似矩阵性质（续）

$A \sim B$：存在可逆（相似变换矩阵）P 使得 $B = P^{-1}AP$，则

- $|A| = |B|$：A 与 B 同时可逆，同时不可逆；
$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |A|$$
- 当 A 与 B 均可逆时，$A^{-1} \sim B^{-1}$；
$$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \sim B^{-1}$$
- $h(t) = (c_0 + c_1 t + \cdots + c_k t^k)/(d_0 + d_1 t + \cdots + d_m t^m)$，则 $h(A) := f(A)g(A)^{-1} \sim f(B)g(B)^{-1} =: h(B)$：
$$\underbrace{\overbrace{(P^{-1}f(A)P)}^{=f(B)}\overbrace{(P^{-1}g(A)P)}^{=f(B)}{}^{-1}}_{=f(B)g(B)^{-1}=h(B)} = \underbrace{P^{-1}(f(A)g(A)^{-1})P}_{=P^{-1}h(A)P}$$

为什么研究相似关系？

定义 称 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 为相似矩阵，如果存在可逆（相似变换矩阵）P 使得 $B=P^{-1}AP$，记 $A\sim B$。

$$B=P^{-1}AP \quad \Rightarrow \quad PB=AP,\ P\ invertible$$

希望 B 既“简单”又具有普适性：

- 零矩阵 $B=0$，$A=PBP^{-1}=0$（普适性 ×）
- 数量矩阵 $B=cE$，$A=PBP^{-1}=cE$；（普适性 ×）
- 对角矩阵 $B=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$（普适性 ✓）

$$AP=\overbrace{A\underbrace{(\eta_1,\cdots,\eta_n)}_{=P}}^{=(A\eta_1,\cdots,A\eta_n)}=\overbrace{\underbrace{(\eta_1,\cdots,\eta_n)}_{=P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}}^{(\lambda_1\eta_1,\cdots,\lambda_n\eta_n)}=PB$$

相似于对角矩阵 $\Rightarrow$ 特征值与特征向量

$A\sim$ 对角矩阵：$P=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，$P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=D$

$$AP=(A\eta_1,\cdots,A\eta_n)=(\lambda_1\eta_1,\cdots,\lambda_n\eta_n)=PD$$

$$\Downarrow$$

$$A\eta_j=\lambda_j\eta_j\quad(\eta_j\neq 0)$$

定义 $\lambda\in C$ 称为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值，如果存在 $\eta\neq 0$ 使得

$$A\eta=\lambda\eta\quad\longleftrightarrow\quad(\lambda E-A)\eta=0$$

称 η 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量（唯一吗 ?）。

特征值与特征向量的计算

定理 η_1 与 η_2 为 A 的属于 λ 的特征向量，则任意线性组合 $c_1\eta_1 + c_2\eta_2 \neq 0$ 均为属于 λ 的特征向量。

$$A(\underbrace{c_1\eta_1 + c_2\eta_2}_{\eta}) = c_1A\eta_1 + c_2A\eta_2 = \lambda(\underbrace{c_1\eta_1 + c_2\eta_2}_{\eta})$$

η 是 A 的属于 λ 的特征向量：η 是 $(\lambda E - A)x = 0$ 的非零解

- λ 是 A 的特征值当且仅当 $(\lambda E - A)x = 0$ 有非零解

$$0 = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

特征值与特征向量的计算（续）

记 $p(\lambda)=|\lambda E-A|$（特征多项式），η 是 A 的属于 λ 的特征向量：

- λ 是 A 的特征根：$p(\lambda)=|\lambda E-A|=0$，有 n 个根（将重数计算在内，m-重根算 m 个根），

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$$

  $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 互异，$n_1,\cdots,n_k$ 为正整数，称为代数重数

$$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$$

- 对某个特征值 λ_j，η 是 $(\lambda_j E-A)x=0$ 的某个非零解。

特征值与特征向量的计算（续）

记 $p(\lambda) = |\lambda E - A|$（特征多项式）:

- 计算 $p(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$ 的根，n 阶方阵有 n 个特征值:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

  $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 互异，n_j 称为 λ_j 的代数重数；$n_1 + \cdots + n_k = n$;

- 对每一个 λ_j（代数重数 n_j），计算 $(\lambda_j E - A)x = 0$ 基本解组

$$w.r.t.\ \lambda_j : \quad \underbrace{\eta_{j,1},\ \cdots,\ \eta_{j,m_j}}_{m_j = n - r(\lambda_j E - A)} \quad m_j \sim n_j\ ?$$

  m_j 是正整数，称为 λ_j 的几何重数，一共可以计算

$$\underbrace{\overbrace{\eta_{1,1},\ \cdots,\ \eta_{1,m_1}}^{w.r.t.\ \lambda_1},\ \overbrace{\eta_{2,1},\ \cdots,\ \eta_{2,m_2}}^{w.r.t.\ \lambda_2},\ \cdots\cdots,\ \overbrace{\eta_{k,1},\ \cdots,\ \eta_{j,m_k}}^{w.r.t.\ \lambda_k}}_{m_1 + \cdots + m_k}$$

特征值与特征向量的计算（续）

$A\sim$ 对角矩阵： $P=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$， $P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=D$

$$AP=(A\eta_1,\cdots,A\eta_n)=(\lambda_1\eta_1,\cdots,\lambda_n\eta_n)=PD$$

$$\Downarrow \quad \Uparrow$$

A 有 n 个线性无关的特征向量 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ （P 的列向量）

$$\underbrace{\overbrace{\eta_{1,1},\ \cdots,\ \eta_{1,m_1}}^{w.r.t.\ \lambda_1},\ \overbrace{\eta_{2,1},\ \cdots,\ \eta_{2,m_2}}^{w.r.t.\ \lambda_2},\ \cdots\cdots,\ \overbrace{\eta_{k,1},\ \cdots,\ \eta_{j,m_k}}^{w.r.t.\ \lambda_k}}_{m_1+\cdots+m_k\ \leq n}$$

特征值与特征向量的计算（续，例 4.2.1）

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix}}_{=(\lambda-6)(\lambda-4)^2}$$

$\lambda_1 = 6$（代数重数 $n_1 = 1$，单根）；$\lambda_2 = 4$（$n_2 = 2$，重根）：

$$\underbrace{\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w.r.t.\ \lambda_1,\ m_1=1}, \quad \underbrace{\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w.r.t.\ \lambda_2,\ m_2=2}$$

特征值与特征向量的计算（续，例 4.2.2）

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix},\quad \underbrace{|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda & 2 \\ -3 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}}_{=(\lambda-4)(\lambda-2)^2}$$

$\lambda_1=4$（代数重数 $n_1=1$，单根）；$\lambda_2=2$（$n_2=2$，重根）：

$$\underbrace{\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w.r.t.\ \lambda_1,\ m_1=1},\quad \underbrace{\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w.r.t.\ \lambda_2,\ m_2=1}$$

特征值与特征向量的计算（续，例 3）

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}}_{=(\lambda-1)(\lambda-2-i)(\lambda-2+i)}$$

$\lambda_1 = 1$（代数重数 $n_1 = 1$）；$\lambda_{2,3} = 2 \pm i$（$n_2 = n_3 = 1$）：

$$\underbrace{\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w.r.t.\ \lambda_1,\ m_1=1}, \quad \underbrace{\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}}_{w.r.t.\ \lambda_2,\ m_2=1}, \quad \underbrace{\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}}_{w.r.t.\ \lambda_3,\ m_3=1}$$

特征值与特征向量的几点观察

- λ 是单特征值，它只有一个线性无关的特征向量；
- λ 是 s-重特征值，它最多只有 s 个线性无关的特征向量，几何重数不超过代数重数；
- 如果 $\lambda = a + ib$ 是实矩阵 A 的特征值，则 $\bar{\lambda} = a - ib$ 也是 A 的特征值

$$0 = |\lambda E - A| = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n \quad (a_n = 1)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1\lambda} + \cdots + \overline{a_n\lambda^n} \\ &= \underbrace{\overline{a_0}}_{=a_0} + \underbrace{\overline{a_1}}_{=a_1}\bar{\lambda} + \cdots + \underbrace{\overline{a_n}}_{=a_n}\underbrace{\overline{\lambda^n}}_{=\bar{\lambda}^n} = \underbrace{a_0 + a_1\bar{\lambda} + \cdots + a_n\bar{\lambda}^n}_{|\bar{\lambda}E - A| = 0} \end{aligned}$$

特征值与特征向量的几点观察（续）

- 如果 $\lambda = a + ib$ 是实矩阵 A 的特征值，$A\eta = \lambda\eta$，

$$\eta = \begin{pmatrix} u_1 + iv_1 \\ \vdots \\ u_n + iv_n \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}^{=:u} + i \overbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}^{=:v}$$

$$\begin{aligned} A\eta = \lambda\eta \quad &\Rightarrow \quad \overline{A\eta} = \bar{A}\bar{\eta} = \bar{\lambda}\bar{\eta} = A\bar{\eta} \\ &\Rightarrow \quad A\bar{\eta} = \bar{\lambda}\bar{\eta} \end{aligned}$$

$\eta = u - iv$ 是 A 的属于 $\bar{\lambda}$ 的特征向量！

特征值与特征向量的性质

η 是矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则

- η 是矩阵 A^k 的属于特征值 λ^k 的特征向量

$$A\eta=\lambda\eta \quad \Rightarrow \quad A^k\eta=A^{k-1}\underbrace{(A\eta)}_{=\lambda\eta}=\lambda A^{k-1}\eta=\cdots=\lambda^k\eta$$

- η 是矩阵 cA 的属于特征值 $c\lambda^k$ 的特征向量（c 是数）;
- $f(t)=c_0+c_1t+\cdots+c_kt^k$，则

$$f(A)\eta=c_0\eta+c_1\underbrace{A\eta}_{\lambda\eta}+\cdots+c_k\underbrace{A^k\eta}_{\lambda^k\eta}=\underbrace{\left(c_0+c_1\lambda+\cdots+c_k\lambda^k\right)}_{f(\lambda)}\eta$$

η 是 $f(A)$ 的属于 $f(\lambda)$ 的特征向量!

特征值与特征向量的性质（续）

- n 阶方阵有 n 个特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则 $|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

$$\underbrace{\overbrace{|0\cdot E - A|}^{|-A|=(-1)^n|A|} = \overbrace{(0-\lambda_1)(0-\lambda_2)\cdots(0-\lambda_n)}^{=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}_{\Leftarrow\ |\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)}$$

A 可逆当且仅当 A 的特征值均非零!

- A 可逆，$A\eta = \lambda\eta$，则 η 是 A^{-1} 的属于 λ^{-1} 的特征向量

$$A\eta = \lambda\eta \quad \Rightarrow \quad \underbrace{A^{-1}A}_{=E}\eta = \lambda A^{-1}\eta \quad \Rightarrow \quad \lambda^{-1}\eta = A^{-1}\eta$$

特征值与特征向量的性质（续）

- $f(t)=c_0+c_1t+\cdots+c_kt^k$，$g(t)=d_0+d_1t+\cdots+d_mt^m$，$g(A)$ 可逆，$A\eta=\lambda\eta$，$h(t)=f(t)/g(t)$，则

$$\underbrace{f(A)\overbrace{g(A)^{-1}\eta}^{=g(\lambda)^{-1}\eta}=\overbrace{f(A)g(\lambda)^{-1}\eta}^{use\ \ f(A)\eta=f(\lambda)\eta}=\overbrace{\underbrace{f(\lambda)g(\lambda)^{-1}}_{=h(\lambda)}\eta}}_{h(A)\eta=h(\lambda)\eta}$$

例如 $h(t)=(1-t)/(1+t)$，拓展

$$h(t)=e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k,\quad e^A:=E+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^k+\cdots$$

特征值与特征向量的性质（续）

n 阶方阵有 n 个特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则

$$p(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(c_0 = p(0) = (-1)^n |A|) \quad = \quad \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

$$(c_0 = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n) \quad = \quad (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

- 比较常数项

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

特征值与特征向量的性质（续）

$$\overbrace{\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}}^{p(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$
$$c_{n-1} = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$$

$$= (\lambda - a_{11}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} - \overbrace{\sum_{j=2}^{n} a_{ij}A_{ij}}^{no\ \lambda^{n-1}\ term}$$

$$= \underbrace{(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn})}_{c_{n-1}=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})} + \cdots + \cdots\ (no\ \lambda^{n-1}\ term)$$

特征值与特征向量的性质（续）

- n 阶方阵有 n 个特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则
  - 比较常数项
    $$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$
  - 比较 λ^{n-1} 项系数
    $$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$
- $A \sim B$，则 A 与 B 有相同的特征多项式，反之未必。

$$\underbrace{|\lambda P^{-1}EP - P^{-1}AP|}_{=|\lambda E - B|} = |P^{-1}(\lambda E - A)P| = \underbrace{|P^{-1}||\lambda E - A||P|}_{=|\lambda E - A|}$$

反例 $A = E_2$ 只与 E 相似，A 不与 B 相似，但它们有相同的特征多项式

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\lambda E - A| = |\lambda E - B| = (\lambda - 1)^2$$

特征值与特征向量的性质（续，例 4.2.4）

例 4.2.4 n 维向量 $u, v \neq 0$，计算 $A = uv^T$ 的特征值与特征向量

$$A\eta = u\overbrace{(v^T\eta)}^{number} = (v^T\eta)u$$

齐次方程 $v^Tx = 0$ 的基本解组 $\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}$（$v^T$ 的秩是 1），则

$$A\eta_j = \overbrace{(v^T\eta_j)}^{=0} u = 0 = 0 \cdot \eta_j \quad (j = 1, \cdots, n-1)$$

- 当 $v^Tu \neq 0$ 时，取 $\eta_n = u$，则 $A\eta_n = (v^Tu)\eta_n$，利用第 4.3 节的结论，A 有线性无关特征向量

$$\underbrace{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-1}}_{w.r.t.\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0}, \quad \underbrace{\eta_n}_{w.r.t\ \lambda_n = v^Tu}$$

特征值与特征向量的性质（续，例 4.2.4）

例 4.2.4 n 维向量 $u, v \neq 0$，计算 $A = uv^T$ 的特征值与特征向量

- 当 $v^T u \neq 0$ 时，取 $\eta_n = u$，则 $A\eta_n = (v^T u)\eta_n$，利用第 4.3 节的结论，A 有线性无关特征向量

$$0 = c_1\eta_1 + \cdots + c_{n-1}\eta_{n-1} + c_n\eta_n \quad \Rightarrow$$

$$\underbrace{A0 = 0 = c_1 \overbrace{A\eta_1}^{=0} + \cdots + c_{n-1} \overbrace{A\eta_{n-1}}^{=0} + c_n \overbrace{A\eta_n}^{\lambda_n\eta_n}}_{c_n\lambda_n\eta_n = c_n(v^T u)u = 0 \ \Rightarrow \ c_n = 0}$$

$\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}$ 是基本解组，

$$\begin{aligned} c_n = 0 \quad &\Rightarrow \quad c_1\eta_1 + \cdots + c_{n-1}\eta_{n-1} = 0 \\ &\Rightarrow \quad c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

特征值与特征向量的性质（续，例 4.2.4）

例 4.2.4 n 维向量 $u, v \neq 0$，计算 $A = uv^T$ 的特征值与特征向量

- 当 $v^T u = 0$ 时，A 只有零特征值！若 A 有特征值 $\lambda \neq 0$，则

$$\overbrace{\underbrace{A\xi = (v^T\xi)u = \lambda\xi \neq 0}_{\xi = cu,\ c = \frac{v^T\xi}{\lambda} \neq 0}}^{\xi = \frac{v^T\xi}{\lambda} u} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{Au = (v^T u)u = \lambda u}_{\lambda = v^T u \neq 0}$$

A 有非零特征值当且仅当 $v^T u \neq 0$！

此时 A 有 $n-1$ 个线性无关特征向量（$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$）

$$\eta_1, \ \eta_2, \ \cdots, \ \eta_{n-1}$$

特征值与特征向量的性质（续，例 4.2.4）

例 4.2.4 n 维向量 $u, v \neq 0$，$A = E + \sigma uv^T$ 的特征值与特征向量？

齐次方程 $v^T x = 0$ 的基本解组 $\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}$

- 当 $v^T u \neq 0$ 时，取 $\eta_n = u$，则 A 有线性无关特征向量

$$\underbrace{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-1}}_{w.r.t.\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 1}, \qquad \underbrace{\eta_n}_{w.r.t\ \lambda_n = 1 + \sigma v^T u}$$

- 当 $v^T u = 0$ 时，A 有有 $n-1$ 个线性无关特征向量

$$\underbrace{\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_{n-1}}_{w.r.t.\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1} \qquad (|E + \sigma uv^T| = 1 + \sigma v^T u)$$

特征值与特征向量的性质（续，例 4.2.7 与 4.2.8）

例 4.2.7 已知 $A \sim B$，计算 a 与 b

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & a & -1 \\ b & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ 10 & 12 & -3 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 + a + 1 = (-2) + 12 + (-5) \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |A| = |B| \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

例 4.2.8 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 可逆，特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，$|A| = \lambda_1 \cdots \lambda_n$：

$$A^* = |A|A^{-1} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{|A|}{\lambda_1}, \frac{|A|}{\lambda_2}, \cdots, \frac{|A|}{\lambda_n}}_{eigenvalues\ \ of\ \ A^*}$$

特征值与特征向量的性质（续，例 4.2.10）

例 4.2.10 已知 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{n\times m}$， 证明

$$\lambda^n|\lambda E_m-AB|=\lambda^m|\lambda E_n-BA|$$

分析： 相似矩阵有相同的特征多项式

$$\begin{pmatrix} E_m & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}\overbrace{\begin{pmatrix} E_m & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}}^{invertible}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix}}_{\lambda^n|\lambda E_m-AB|}\sim\underbrace{\begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}}_{\lambda^m|\lambda E_n-BA|} \Rightarrow \begin{array}{c}\lambda^n|\lambda E_m-AB| \\ \| \\ \lambda^m|\lambda E_n-BA|\end{array}$$

矩阵可对角化的充要条件（充分性）

定理 4.3.1 如果 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 与一个对角矩阵相似，则称 A 可对角化。A 可对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量

证明（1）充分性：A 有 n 个线性无关的特征向量 $\eta_1,\cdots,\eta_n$，必有 λ_j 使得 $A\eta_j=\lambda_j\eta_j$。令

$$P=(\eta_1,\cdots,\eta_n),\qquad D=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

$$\overbrace{(A\eta_1,\cdots,A\eta_n)}^{=AP}=\overbrace{(\lambda_1\eta_1,\cdots,\lambda_n\eta_n)}^{PD}$$

$\eta_1,\cdots,\eta_n$ 线性无关，因此 P 可逆，$P^{-1}AP=D$，A 可对角化。

矩阵可对角化的充要条件（续，必要性）

证明（2）必要性：$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可对角化：存在可逆矩阵 P 与矩阵 D 使得 $P^{-1}AP=D$：

$$P=(\eta_1,\cdots,\eta_n),\qquad D=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

$$P^{-1}AP=D \quad\Rightarrow\quad AP=PD$$

$$\Rightarrow\quad \overbrace{(A\eta_1,\cdots,A\eta_n)}^{=AP}=\overbrace{(\lambda_1\eta_1,\cdots,\lambda_n\eta_n)}^{PD}$$

$$\Rightarrow\quad A\eta_j=\lambda_j\eta_j$$

这表明 η_j 是特征向量；由 P 可逆可知 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 线性无关，即 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\eta_1,\cdots,\eta_n$。 $\square$

矩阵可对角化的充要条件（续，概要）

$$D = P^{-1}AP \iff PD = AP,\ P \textit{ invertible}$$

$$P = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \textit{ invertible} \iff \eta_1, \cdots, \eta_n \textit{ linear independent}$$

$$\left.\begin{array}{r} D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \\ AP = PD \end{array}\right\} \iff A\eta_j = \lambda_j\eta_j \quad (j = 1, \cdots, n)$$

$$AP = \overbrace{A\underbrace{(\eta_1, \cdots, \eta_n)}_{=P}}^{=(A\eta_1, \cdots, A\eta_n)} = \overbrace{\underbrace{(\eta_1, \cdots, \eta_n)}_{=P}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}^{(\lambda_1\eta_1, \cdots, \lambda_n\eta_n)} = PB$$

矩阵可对角化的充要条件（续，例 4.2.9）

例 4.2.10 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，向量 η_1，η_2，η_3 线性无关，

$$A\eta_1=-3\eta_1+2\eta_2-\eta_3,\quad A\eta_2=6\eta_1+\eta_2+2\eta_3,\quad A\eta_3=\eta_1+\eta_2+3\eta_3$$

计算 A 的特征值与特征向量，判断是否可以对角化。

分析：由 $A\eta_1$，$A\eta_1$ 与 $A\eta_1$ 可由 η_1，η_2，η_3 线性表出可知

$$A(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\overbrace{(\eta_1,\eta_2,\eta_3)}^{=P_1\ \textit{invertible}}\overbrace{\begin{pmatrix}-3&6&1\\2&1&1\\-1&2&3\end{pmatrix}}^{=B}\Rightarrow\begin{array}{c}AP_1=P_1B\\P\ \textit{invertible}\\\Downarrow\\B=P_1^{-1}AP_1\\A\sim B\end{array}$$

矩阵可对角化的充要条件（续，例 4.2.9）

例 4.2.10 $A \sim B$，A 与 B 均可对角化（$\checkmark$），或者，均不可对角化：

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -6 & -1 \\ -2 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \overbrace{\lambda^3 - \lambda^2 - 22\lambda + 40}^{=(\lambda+5)(\lambda-2)(\lambda-4)}$$

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -5 & \xi_1 = (46, -17, 10)^T \\ \lambda_2 = 2 & \xi_2 = (-1, -1, 1)^T \\ \lambda_3 = 4 & \xi_3 = (1, 1, 1)^T \end{array} \Rightarrow \underbrace{\overbrace{BP_2 = P_2 D, \ P_2^{-1} BP_2 = D}^{P_2=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\ \ invertible}}_{D=diag(-5,2,4)}$$

$$\Rightarrow \quad D = P_2^{-1} BP_2 = (P_1 P_2)^{-1} AP_1 P_2, \ \ P = P_1 P_2 = \underbrace{(P_1\xi_1, P_1\xi_2, P_1\xi_3)}_{eigenvectors\ \ of\ \ A}$$

矩阵可对角化的充分条件

定理 4.3.2 $A\eta_j=\lambda_j\eta_j$（$1\le j\le k$），λ_1，$\cdots$，λ_k 互异，则 $\eta_1,\cdots,\eta_k$ 线性无关。

（1）证明 η_1，η_2 线性无关：假定 $c_1\eta_1+c_2\eta_2=0$，则

$$\left.\begin{array}{r}\overbrace{c_1\lambda_1\eta_1+c_2\lambda_2\eta_2}^{=A(c_1\eta_1+c_2\eta_2)}=0\\ c_1\lambda_1\eta_1+c_2\lambda_1\eta_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{c}c_2(\lambda_2-\lambda_1)\eta_2=0\\ \Downarrow\\ c_2=0,\ c_1=0\end{array}$$

（2）假定 η_1，$\cdots$，η_{k-1} 线性无关，$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_k\eta_k=0$，

$$\left.\begin{array}{r}\overbrace{c_1\lambda_1\eta_1+\cdots+c_{k-1}\lambda_{k-1}\eta_{k-1}+c_k\lambda_k\eta_k}^{=A(c_1\eta_1+\cdots+c_{k-1}\eta_{k-1}+c_k\eta_k)}=0\\ \lambda_kc_1\eta_1+\cdots+\lambda_kc_{k-1}\eta_{k-1}+\lambda_kc_k\eta_k=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

矩阵可对角化的充分条件（续）

定理 4.3.2 $A\eta_j = \lambda_j \eta_j$ $(1 \leq j \leq k)$，λ_1，$\cdots$，λ_k 互异，则 $\eta_1, \cdots, \eta_k$ 线性无关。

(2)（续）假定 η_1，$\cdots$，η_{k-1} 线性无关，

$$\Rightarrow \quad c_1(\lambda_k - \lambda_1)\eta_1 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\eta_{k-1} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$c_1(\lambda_k - \lambda_1) = \cdots = c_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0$$

λ_1，$\cdots$，λ_k 两两不同，$\Rightarrow$ $c_1 = \cdots = c_{k-1}$，所以 $c_k = 0$。 □

推论 4.3.3 n 阶方阵 A 有 n 个互异特征值，则 A 可以对角化。

矩阵可对角化的充分条件

定理 4.3.4 n 阶方阵 A 有 k 个互异特征值：$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$，取 A 的属于 λ_j 的线性无关特征向量组

$$\eta_{j,1}, \cdots, \eta_{j,m_j}$$

则如下向量组线性无关

$$\underbrace{\overbrace{\eta_{1,1}, \cdots, \eta_{1,m_1}}^{w.r.t.\ \lambda_1}, \overbrace{\eta_{2,1}, \cdots, \eta_{2,m_2}}^{w.r.t.\ \lambda_2}, \cdots\cdots, \overbrace{\eta_{k,1}, \cdots, \eta_{k,m_k}}^{w.r.t.\ \lambda_k}}_{m_1+\cdots+m_k}$$

证明：取线性组合

$$\begin{aligned} 0 = & (c_{1,1}\eta_{1,1} + \cdots + c_{1,m_1}\eta_{1,m_1}) + (c_{2,1}\eta_{2,1} + \cdots + c_{2,m_2}\eta_{2,m_2}) \\ & + \cdots\cdots + (c_{k,1}\eta_{k,1} + \cdots + c_{k,m_k}\eta_{k,m_k}) \end{aligned}$$

矩阵可对角化的充分条件（续，定理 4.3.4）

$$
\begin{aligned}
0 = \; & \overbrace{c_{1,1}\eta_{1,1} + \cdots + c_{1,m_1}\eta_{1,m_1}}^{=\xi_1,\; w.r.t.\; \lambda_1} + \overbrace{c_{2,1}\eta_{2,1} + \cdots + c_{2,m_2}\eta_{2,m_2}}^{=\xi_2,\; w.r.t.\; \lambda_2} \\
& + \cdots\cdots + \underbrace{c_{k,1}\eta_{k,1} + \cdots + c_{k,m_k}\eta_{k,m_k}}_{\xi_k,\; w.r.t.\; \lambda_k}
\end{aligned}
$$

$A\xi_j = \lambda_j\xi_j$，如果 $\xi_j \neq 0$，那么 ξ_j 是 A 的属于 λ_j 的特征向量，

$$\xi_1 + \xi_2 + \cdots = 0$$

表明 $\xi_j = 0$ $(1 \leq j \leq k)$，由 $\eta_{j,1}$，$\cdots$，η_{j,m_j} 线性无关可知

$$\xi_j = c_{j,1}\eta_{j,1} + \cdots + c_{j,m_j}\eta_{j,m_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{j,1} = \cdots = c_{j,m_j} = 0.$$

矩阵可对角化的充分必要条件（定理 4.3.5）

定理 4.3.5 λ_0 是 n 阶方阵 A 的一个特征值，其代数重数是 k，取 $(\lambda_0 E - A)x = 0$ 的基本解组 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$，则 $s \leq k$。

证明：单位坐标向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是以下向量组

$$\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s, e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

的一个极大线性无关组，$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性无关，因此必有另一个极大线性无关组

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s,\ e_{j_1} =: \eta_{s+1},\ \cdots,\ e_{j_{n-s}} =: \eta_n$$

则 $P = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s, \eta_{s+1}, \cdots, \eta_n)$ 可逆，$Pe_j = \eta_j$，$e_j = P^{-1}\eta_j$。

矩阵可对角化的充分必要条件（定理 4.3.5）

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P^{-1}(A\eta_1,\cdots,A\eta_s,A\eta_{s+1},\cdots,A\eta_n)\\
&= P^{-1}(\lambda_0\eta_1,\cdots,\lambda_0\eta_s,A\eta_{s+1},\cdots,A\eta_n)\\
&= (\lambda_0\underbrace{P^{-1}\eta_1}_{e_1},\cdots,\lambda_0\underbrace{P^{-1}\eta_s}_{e_s},\underbrace{P^{-1}A\eta_{s+1}}_{\alpha_{s+1}},\cdots,\underbrace{P^{-1}A\eta_n}_{\alpha_n})\\
&= \begin{pmatrix}\lambda_0E_s & B_{12}\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}=B,\quad \overbrace{\begin{vmatrix}(\lambda-\lambda_0)E_s & -B_{12}\\ 0 & \lambda E_{n-s}-B_{22}\end{vmatrix}}^{=|\lambda E-B|}
\end{aligned}
$$

由 $A\sim B$ 可知，$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=(\lambda-\lambda_0)^s|\lambda E_{n-s}-B_{22}|$，
这表明：λ_0 的代数重数 k 至少是其几何重数 s！ □

矩阵的对角化

- 计算 $p(\lambda)=|\lambda E-A|=0$ 的根，n 阶方阵有 n 个特征值：

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 互异，n_j 称为 λ_j 的代数重数；$n_1+\cdots+n_k=n$；

- 对每一个 λ_j（代数重数 n_j），计算 $(\lambda_j E-A)x=0$ 基本解组

$$w.r.t.\ \lambda_j:\quad \underbrace{\eta_{j,1},\ \cdots,\ \eta_{j,m_j}}_{m_j=n-r(\lambda_j E-A)}\qquad m_j\sim n_j\ ?$$

m_j 是正整数，称为 λ_j 的几何重数，一共可以计算

$$\underbrace{\overbrace{\eta_{1,1},\ \cdots,\ \eta_{1,m_1}}^{w.r.t.\ \lambda_1},\ \overbrace{\eta_{2,1},\ \cdots,\ \eta_{2,m_2}}^{w.r.t.\ \lambda_2},\ \cdots\cdots,\ \overbrace{\eta_{k,1},\ \cdots,\ \eta_{j,m_k}}^{w.r.t.\ \lambda_k}}_{m_1+\cdots+m_k}$$

矩阵的对角化（续）

- A 可对角化当且仅当 $m_1+\cdots+m_k=n$，当且仅当每一个特征值的代数重数等于其几何重数（$m_j=n_j$）；n 阶方阵 A 有 n 个互异特征值，则 A 可以对角化！（可对角化的矩阵很多）
- 当 $m_1+\cdots+m_k=n$ 时，取方阵

$$P=(\eta_{1,1},\ \cdots,\ \eta_{1,m_1},\ \eta_{2,1},\ \cdots,\ \eta_{2,m_2},\cdots,\eta_{k,1},\cdots,\eta_{j,m_k})$$

列向量组线性无关的方阵必可逆，取对角矩阵

$$D=diag(\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{m_1},\underbrace{\lambda_2\cdots,\lambda_2}_{m_2},\cdots,\underbrace{\lambda_k,\cdots,\lambda_k}_{m_k})$$

则 $P^{-1}AP=D$，即为所求。

矩阵对角化的计算（例 4.2.1）

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix},\quad |\lambda E-A|=\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda-4 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix}}_{=(\lambda-6)(\lambda-4)^2}$$

$\lambda_1=6$（代数重数 $n_1=1$，单根）；$\lambda_2=4$（$n_2=2$，重根）：

$$\underbrace{\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w.r.t.\ \lambda_1,\ m_1=1},\quad \underbrace{\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w.r.t.\ \lambda_2,\ m_2=2}$$

矩阵对角化的计算（续，例 4.2.1）

- 每一个特征值的 λ_1 的代数重数与几何重数相同：$n_1=m_1=1$，$m_2=n_2=2$（n 阶矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量），可对角化；
- 相似变换矩阵不唯一，对角矩阵也不唯一：

$$
\begin{aligned}
P&=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), & P^{-1}AP&=diag(6,4,4)\\
P&=(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2), & P^{-1}AP&=diag(6,4,4)\\
P&=(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3), & P^{-1}AP&=diag(4,6,4)\\
P&=(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1), & P^{-1}AP&=diag(4,4,6)\\
P&=(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2), & P^{-1}AP&=diag(4,6,4)\\
P&=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1), & P^{-1}AP&=diag(4,4,6)
\end{aligned}
$$

相似矩阵的第 j 列于 D 的第 j 个对角元是特征对！

矩阵的对角化（续，例 4.2.4）

例 4.2.4 n 维向量 $u, v \neq 0$，计算 $A = uv^T$ 的特征值与特征向量。

齐次方程 $v^T x = 0$ 的基本解组 $\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}$ 时属于 0 的 $n-1$ 个线性无关的特征向量；

$$A\eta_j = \overbrace{(v^T \eta_j)}^{=0} u = 0 = 0 \cdot \eta_j \quad (j = 1, \cdots, n-1)$$

- 当 $v^T u \neq 0$ 时，A 可对角化：取 $\eta_n = u$，则 $A\eta_n = (v^T u)\eta_n$，A 有线性无关特征向量

$$\overbrace{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-1}}^{w.r.t.\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0}, \quad \overbrace{\eta_n}^{w.r.t\ \lambda_n = v^T u}$$

$$P^{-1}AP = diag(\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1}, v^T u), \quad P = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-1}, \eta_n)$$

矩阵的对角化（续，例 4.2.4）

例 4.2.4 n 维向量 $u, v \neq 0$，计算 $A = uv^T$ 的特征值与特征向量。

齐次方程 $v^T x = 0$ 的基本解组 $\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}$ 时属于 0 的 $n-1$ 个线性无关的特征向量；

$$A\eta_j = \overbrace{(v^T \eta_j)}^{=0} u = 0 = 0 \cdot \eta_j \quad (j = 1, \cdots, n-1)$$

- 当 $v^T u = 0$ 时，A 不可对角化：A 有 $n-1$ 个线性无关特征向量 $\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}$（属于 0 特征值），A 只有零特征值

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \lambda_n = 0$$

矩阵的对角化（续，例 4.3.5）

例 4.3.5 证明：n 阶方阵 A 满足 $A^2=E$，则 A 可以对角化。

假定 λ 时 A 的特征值，那么 $A\eta=\lambda\eta$，$\eta\neq 0$，我们有：

$$A^2\eta=\lambda^2\eta=1\cdot\eta \quad\Rightarrow\quad \lambda^2=1,\ \lambda=\pm 1$$

$$A^2-E=(E-A)(-E-A)=0 \quad\Rightarrow\quad |E-A||-E-A|=0$$

- 如果 $|E-A|\neq 0$，那么 $E-A$ 可逆，$-E-A=0$，故 $A=-E$ 可对角化；如果 $|-E-A|\neq 0$，那么 $-E-A$ 可逆，$E-A=0$，故 $A=E$ 可对角化；

矩阵的对角化（续，例 4.3.5）

- 如果 $|E-A|=|-E-A|=0$，则 ± 1 均为 A 的特征值，记：
  $0\neq E-A$ 的列向量组的极大线性无关组 $\eta_1,\cdots,\eta_r$；
  $0\neq -E-A$ 的列向量组的极大线性无关组 $\xi_1,\cdots,\xi_s$。

$$\begin{aligned} A^2-E=(E-A)(-E-A)=0 &\quad\Rightarrow\quad (E-A)\xi_j=0 \\ A^2-E=(-E-A)(E-A)=0 &\quad\Rightarrow\quad (-E-A)\eta_j=0 \end{aligned}$$

A 有 $n\leq r+s\leq n$ 个线性无关的特征向量，可对角化！

$$\underbrace{\overbrace{\eta_1,\cdots,\eta_r}^{w.r.t.\ \lambda_1=-1}}_{m_1=n_1=r},\quad \underbrace{\overbrace{\xi_1,\cdots,\xi_s}^{w.r.t.\ \lambda_2=1}}_{m2=n_2=s=n-r},\qquad \underbrace{r(2E)=n\leq \overbrace{r(E-A)}^{=r}+\overbrace{r(E+A)}^{=r(-E-A)=s}}_{since\ (E-A)+(E+A)=2E}$$

矩阵的对角化（续，补充例子）

补充例子 证明：n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，则 A 可以对角化。

假定 λ 时 A 的特征值，那么 $A\eta=\lambda\eta$，$\eta\neq 0$，我们有：

$$(A^2-A)\eta=(\lambda^2-\lambda)\eta=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2-\lambda=0,\ \lambda=0,\ 1$$

$$A^2-A=(E-A)(0\cdot E-A)=0 \quad \Rightarrow \quad |E-A||0\cdot E-A|=0$$

- 若 $|E-A|\neq 0$ 或 $|A|\neq 0$，则 $A=0$ 或 $A=E$，可对角化；
- 否则，A 有 n 个线性无关的特征向量，可对角化！

$$\underbrace{\overbrace{\eta_1,\cdots,\eta_r}^{w.r.t.\ \lambda_1=0}}_{m_1=n_1=r},\ \underbrace{\overbrace{\xi_1,\cdots,\xi_s}^{w.r.t.\ \lambda_2=1}}_{m2=n_2=s=n-r},\quad \underbrace{r(E)=n\leq \overbrace{r(E-A)}^{=r}+\overbrace{r(A)}^{=r(0\cdot E-A)=s}}_{since\ (E-A)+A=E}$$

矩阵对角化的计算（例 4.3.3）

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\quad \underbrace{|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}}_{=(\lambda+1)^3}$$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$（代数重数 $n_1=3$）：

$$\lambda_1 E-A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(\lambda_1 E-A)x=0$ 的基本解组 η_1，$m_1=1<3=n_1$，不能对角化。

向量的内积

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的共轭转置矩阵：

$$A^H=\overline{A}^T=\begin{pmatrix}\overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}}\\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}}\end{pmatrix}\qquad \overbrace{z=a+ib,\ \bar{z}=a-ib}^{conjugate}$$

定义 向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 与 $y=(y_1,\cdots,y_n)^T$ 的内积定义为：

$$(x,y)=\underbrace{x_1\overline{y_1}+\cdots+x_n\overline{y_n}=y^Hx}_{y^H=\bar{y}^T=(\overline{y_1},\cdots,\overline{y_n})}$$

向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 的长度（范数）定义为 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$。

实内积的性质

对于实向量 x 与 y 有:

- $(x,y)=(y,x)=x^Ty=y^Tx$;
- $(x,y)=k(x,y)$, $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;
- $(x,x)\geq 0$; $(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$;
- $|(x,y)|\leq \|x\|\|y\|$ (Cauchy-Schwartz 不等式)

$$\|x+ty\|^2=(x+ty)^H(x+ty)=(x,x)+2t(x,y)+t^2(y,y)\geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta=4(x,y)^2-4(x,x)(y,y)\leq 0 \quad \Rightarrow \quad |(x,y)|\leq \sqrt{(x,x)(y,y)}$$

定义 对于非零向量 x 与 y, 其夹角定义为:

$$\theta(x,y):=\arccos\left(\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}\right)$$

向量的正交

定义 如果 $(x, y) = 0$，则称向量 x 与 y 正交。

- A 为 $m \times n$ 实矩阵，$Ax = 0$ 当且仅当 x 与 A 的行向量正交：

$$(x, \alpha_j) = \alpha_j^T x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = Ax = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \alpha_1^T x \\ \vdots \\ \alpha_m^T x \end{pmatrix}$$

- x 与任意 n 维向量正交，当且仅当 $x = 0$；

$$e_j^T x = (e_j, x) = 0 \quad (1 \le j \le n) \quad \Rightarrow \quad Ex = x = 0$$

正交向量组

定义 $\eta_1, \cdots, \eta_k$ 是正交向量组，如果不含非零向量且两两正交。

- 正交向量组必线性无关：$\eta_1, \cdots, \eta_k$ 是正交向量组

$$c_1\eta_1+\cdots+c_k\eta_k=0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(c_1\eta_1+\cdots+c_k\eta_k, \eta_j) = c_j \overbrace{(\eta_j, \eta_j)}^{\|\eta_j\|^2} = 0}_{\Rightarrow \quad c_1=\cdots=c_k=0}$$

- $A=(\eta_1, \cdots, \eta_k)$，$\eta_1, \cdots, \eta_k$ 是正交向量组当且仅当 $A^HA=D$ 是对角矩阵，对角元 $d_{jj}=(\eta_j, \eta_j)>0$

$$D=\begin{pmatrix} \eta_1^H\eta_1 & \eta_1^H\eta_2 & \cdots & \eta_1^H\eta_k \\ \eta_2^H\eta_1 & \eta_2^H\eta_2 & \cdots & \eta_2^H\eta_k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \eta_k^H\eta_1 & \eta_k^H\eta_2 & \cdots & \eta_k^H\eta_k \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \underbrace{\overbrace{\eta_i^H\eta_j=(\eta_i, \eta_j)=0}^{\eta_i \perp \eta_j}}_{i\neq j}$$

规范正交向量组

定义 η 称为单位向量，如果 $\|\eta\| = 1$，或者等价地，$(\eta, \eta) = 1$。向量组 $\eta_1, \cdots, \eta_k$ 称为规范（标准）正交的，如果这个向量组是正交的，且期中每一个向量是单位向量。

- $\eta \neq 0$，则 $\eta/\|\eta\|$ 是单位向量；
- $A = (\eta_1, \cdots, \eta_k)$，$\eta_1, \cdots, \eta_k$ 是规范正交向量组当且仅当 $A^H A = E_k$ 是单位矩阵

$$A^H A = \begin{pmatrix} \eta_1^H \eta_1 & \eta_1^H \eta_2 & \cdots & \eta_1^H \eta_k \\ \eta_2^H \eta_1 & \eta_2^H \eta_2 & \cdots & \eta_2^H \eta_k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \eta_k^H \eta_1 & \eta_k^H \eta_2 & \cdots & \eta_k^H \eta_k \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} (\eta_j, \eta_j) = \|\eta_j\|^2 = 1 \\ \underbrace{\eta_i^H \eta_j = (\eta_i, \eta_j) = 0}_{i \neq j,\ \eta_i \perp \eta_j} \end{array}$$

正交矩阵及其性质

定义 $A=(a_{ij})_{n\times k}$ 是实矩阵，$n\geq k$，如果 $A^TA=E_k$，则称 A 为列正交矩阵。列正交的方阵称为正交矩阵。

- A 是正交矩阵当且仅当其列向量组是规范正交的；
- A 是正交矩阵当且仅当 $A^T=A^{-1}$（A 是方阵）；

$$A^TA=E_n \quad\Longleftrightarrow\quad A^TAA^{-1}=A^T=A^{-1}$$

- A 是正交矩阵当且仅当 $AA^T=E_n$（A^T 是正交矩阵）；

$$AA^T=E_n \quad\Longleftrightarrow\quad A^{-1}AA^T=A^T=A^{-1}$$

正交矩阵及其性质（续）

- A 与 B 是正交矩阵，则 $C = AB$ 也是正交矩阵；

$$(AB)^T(AB) = B^T(A^TA)B = B^TB = E$$

- A 是正交矩阵当且仅当 $A^T = A^{-1}$ 是正交矩阵

$$A^TA = E_n \iff A^T = A^{-1} \iff AA^T = E_n$$

- A 是正交矩阵当且仅当其行向量组是规范正交的：
  - A 是正交矩阵当且仅 A^T 是正交矩阵；
  - A^T 是正交矩阵当且仅当 A^T 的列向量组规范正交；
  - A^T 的列向量组即为 A 的行向量组。

- A 是正交矩阵，则 $|A| = \pm 1$；

$$A^TA = E_n \iff |A^TA| = |A|^2 = 1 = |E_n|$$

正交矩阵及其性质（续）

- $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$，则

$$\|x\|^2 = (x, x) = \overbrace{x^H x}^{=x^T\bar{x}} = \overbrace{x_1\bar{x}_1}^{|x_1|^2} + \cdots + \overbrace{x_n\bar{x}_n}^{=|x_n|^2}$$

- A（实）正交，x 为（复）向量，则 $(Ax)^T(\overline{Ax}) = x^T\bar{x} = \|x\|^2$：

$$(Ax)^T(\overline{Ax}) = x^T \overbrace{A^T\bar{A}}^{=A^TA=E} \bar{x} = x^T\bar{x} \quad ({\color{red}A = \bar{A} \text{ real matrix}})$$

- A 是正交矩阵，λ 是 A 的特征值，则 $|\lambda| = 1$

$$A\eta = \lambda\eta,\ \eta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(A\eta)^T(\overline{A\eta})}_{=\|\eta\|^2>0} = (\lambda\eta)(\overline{\lambda\eta}) = (\underbrace{\lambda\bar{\lambda}}_{=|\lambda|^2})\underbrace{(\eta^T\bar{\eta})}_{=\|\eta\|^2}$$

正交矩阵及其性质（续）

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为列正交的实矩阵，x 与 y 为 n-维的实向量，则

$$(Ax,Ay)=(Ax)^T(Ay)=x^T\overbrace{(A^TA)}^{=E_n}y=x^Ty=(x,y)$$

$$\|Ax\|^2=(Ax,Ax)=x^Tx=(x,x)=\|x\|^2$$

正交矩阵定义了正交变换 $x\to Ax=y$，几何体可以视为向量（终点）的集合 $S\subseteq R^n$

$$S\subseteq R^n\quad\longrightarrow\quad S'=\{y=Ax\in R^n|\ x\in S\}$$

正交矩阵保持向量的内积，因此不改变几何体的形状与大小！

正交矩阵及其性质（续，Householder 矩阵）

Householder 反射矩阵：$A=E-2vv^T$，其中 $\|v\|=1$：

$$A^TA=(E-2vv^T)^T(E-2vv^T)=E-4vv^T+4v\underbrace{\overbrace{(\,v^Tv\,)}^{=(v,v)}}_{=\|v\|^2=1}v^T=E$$

给定 $p,q\in R^n$，$\|p\|=\|q\|$，$v=(p-q)/\|p-q\|$（单位向量）

$$\begin{aligned}Ap &= (E-2vv^T)p=p-2\frac{(p-q)(p-q)^Tp}{(p-q)^T(p-q)}\\ &= p-2\frac{(p-q)(p^Tp-q^Tp)}{p^Tp-2q^Tp+2p^Tp}=p-2\frac{(p^Tp-q^Tp)}{2(p^Tp-q^Tp)}(p-q)\\ &= p-(p-q)=q\end{aligned}$$

向量组的正交化

目的：给定线性无关的向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$，产生规范正交向量组 $\xi_1, \cdots, \xi_m$，使得 ξ_k 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 表出，$1 \leq k \leq m$。

$$\xi_k = r_{1k}\alpha_1 + r_{2k}\alpha_2 + \cdots + r_{kk}\alpha_k$$

$$\underbrace{(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)}_{=:Q} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}}_{=:C \ upper \ triangular}$$

- 如果能做到，则由 $r(A) = r(Q) = m$ 可知 $r(C) = m$，故 C 可逆，记 $R = C^{-1}$，$A = QR$（QR 分解）。

向量组的正交化（续，怎么做？）

目的：给定线性无关的向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$，产生规范正交向量组 $\xi_1, \cdots, \xi_m$，使得 ξ_k 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 表出，$1 \le k \le m$。

$$\xi_k = r_{1k}\alpha_1 + r_{2k}\alpha_2 + \cdots + r_{kk}\alpha_k$$

- **正交化**：先产生正交向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$，使得 β_k 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 表出，$1 \le k \le m$。
  - $\beta_1 := \alpha_1$；
  - $\beta_2 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$，要求 $\beta_2 \perp \beta_1$，这样的 β_2 不唯一

$$0 = (\beta_2, \beta_1) = c_1(\overbrace{\alpha_1}^{=\beta_1}, \beta_1) + c_2(\alpha_2, \beta_1)$$

$$\Uparrow$$

$$c_2 = 1,\ c_1 = -\frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \underbrace{\beta_1}_{=\alpha_1}$$

向量组的正交化（续，怎么做？）

- 已计算正交向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_{k-1}$，$\beta_j$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_j$ 表出。计算 $\beta_k=\tilde{c}_1\alpha_1+\cdots+\tilde{c}_{k-1}\alpha_{k-1}+c_k\alpha_k$，满足 $\beta_k\perp\beta_j$:

$$\underbrace{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k-1})}_{=:Q_1}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k-1}}_{=:A_1}\underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1,k-1} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2,k-1} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{k-1,k-1} \end{pmatrix}}_{=:C_1 \;\; upper \;\; triangular}$$

$r(A_1)=r(Q_1)=k-1$ 可知 $r(C_1)=k-1$，故 C_1 可逆，记 $R_1=C^{-1}$，$A_1=Q_1R_1$，向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-}$ 可由正交向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_{k-1}$ 线性表出

向量组的正交化（续，怎么做？）

- $$\beta_k = \overbrace{\tilde{c}_1\alpha_1 + \cdots + \tilde{c}_{k-1}\alpha_{k-1}}^{c_1\beta_1+\cdots+c_{k-1}\beta_{k-1}} + c_k\alpha_k$$

$$\begin{aligned} 0 = (\beta_k, \beta_j) &= (c_1\beta_1 + \cdots + c_{k-1}\beta_{k-1} + c_k\alpha_k, \beta_j) \\ &= \underbrace{(c_1\beta_1 + \cdots + c_{k-1}\beta_{k-1}, \beta_j)}_{=c_j(\beta_j,\beta_j)} + c_k(\alpha_k, \beta_j) \\ &= c_j(\beta_j, \beta_j) + c_k(\alpha_k, \beta_j) \end{aligned}$$

$$\Uparrow$$

$$c_k = 1, \ \ c_j = -\frac{(\alpha_k, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)} \quad \Rightarrow \quad \beta_k = \alpha_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\alpha_k, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)}\beta_j$$

向量组的正交化（续，怎么做？）

施密特标准正交化过程：

- 正交化：产生正交 $\beta_1, \cdots, \beta_m$，β_k 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 表出：

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_k = \alpha_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\alpha_k, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)} \beta_j$$

$\beta_2 \perp \beta_1$，$\beta_3 \perp \{\beta_1, \beta_2\}$，$\cdots$，$\beta_k \perp \{\beta_1, \cdots, \beta_{k-1}\}$，$\cdots$
$\Rightarrow$ $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 两两正交。

- 标准化：

$$\xi_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \quad \xi_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \quad \cdots, \quad \xi_m = \frac{\beta_m}{\|\beta_m\|}$$

向量组的正交化（续，例 4.4.4）

例 4.4.4 $\alpha_1=(1,0,0,1)^T$，$\alpha_2=(1,1,0,1)^T$，$\alpha_3=(1,1,1,0)^T$，施密特标准正交化过程：

- **正交化**：产生正交 β_1,β_2,β_3，β_k 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 表出：

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1=(1,0,0,1)^T\\
\beta_2 &= \alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2-\frac{2}{2}\beta_1=(0,1,0,0)^T\\
\beta_3 &= \alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2\\
&= \alpha_3-\frac{1}{2}\beta_1-\frac{1}{1}\beta_2=(\frac{1}{2},0,1,-\frac{1}{2})^T
\end{aligned}
$$

- **标准化**：$\xi_1=\beta_1/\|\beta_1\|$，$\xi_2=\beta_2/\|\beta_2\|$，$\xi_3=\beta_3/\|\beta_3\|$。

实对称矩阵

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实矩阵并且 $A=A^T$，则称 A 是实对称矩阵。

- 实对称矩阵的特征值是实数。$(\overline{A^T}=A)$

$$
\begin{aligned}
A\eta=\lambda\eta,\ \eta\neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \eta^H A\eta = \lambda\,\overbrace{\eta^H\eta}^{real} \\
&\Rightarrow \quad \overline{(\eta^H A\eta)^T} = \overline{(\lambda\eta^H\eta)^T} \\
&\Rightarrow \quad \eta^H \underbrace{\overline{A^T}}_{=A}\eta = \overline{\lambda}(\eta^H\eta) \\
&\Rightarrow \quad \lambda\underbrace{(\eta^H\eta)}_{>0,\ \eta\neq 0} = \overline{\lambda}(\eta^H\eta) \quad \Rightarrow \quad \lambda=\overline{\lambda}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ 实对称矩阵的特征值有实的特征向量。

实对称矩阵（续，性质）

- 实对称矩阵的特征值是实数。($\overline{A^T} = A$)
- 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量正交。

$$A\eta_1 = \lambda_1\eta_1, \quad A\eta_2 = \lambda_2\eta_2, \quad \eta_1 \neq 0,\ \eta_2 \neq 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\eta_2^T A\eta_1 = \lambda_1\eta_2^T\eta_1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(\eta_2^T A\eta_1)^T}_{=\eta_2^T A\eta_1} = \underbrace{\eta_1^T \underbrace{\overbrace{A^T}^{=A}\eta_2}_{=\lambda_2\eta_2} = \lambda_1\eta_2^T\eta_1}_{\eta_1^T\eta_2=\eta_2^T\eta_1,\ \lambda_1\eta_1^T\eta_2=\lambda_1\eta_1^T\eta_2}$$

$$\Rightarrow \quad \eta_1^T\eta_2 = (\eta_1, \eta_2) = 0 \quad (\uparrow\ \textit{since}\ \lambda_1 \neq \lambda_2)$$

规范正交向量组的扩张

定理 $\eta_1, \cdots, \eta_k$ 是规范正交向量组（n 维），如果 $n > k$，则此向量组必可扩充为规范正交向量组（规范正交基）

$$\eta_1, \ \cdots, \ \eta_k, \ \eta_{k+1}, \ \eta_{k+2}, \ \cdots, \ \eta_n$$

证明：$\eta_1, \cdots, \eta_k$ 线性无关，所以 $r\{\eta_1, \cdots, \eta_k\} = k$

$$\begin{cases} \eta_1^T x = 0 \\ \quad \vdots \\ \eta_k^T x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-k} \\ (orthonormalization) \\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-k} \end{array}$$

α_j 可由 $\xi_1, \cdots, \xi_j$ 表出，故 α_j 是以上齐次线性方程组的解，因此

$$\{ \underbrace{\alpha_1}_{=:\eta_{k+1}}, \ \underbrace{\alpha_2}_{=:\eta_{k+2}}, \ \cdots, \ \underbrace{\alpha_{n-k}}_{=:\eta_n} \} \perp \{\eta_1, \ \cdots, \ \eta_k\}$$

实对称矩阵的正交对角化

定理 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实对称矩阵，则必有正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=D$ 为对角矩阵。

- 奠基：$n=1$ 时结论成立（$Q=1$，$D=A$）；
- 假定对于 $n-1$ 阶实对称矩阵 B 有正交矩阵 P（$n-1$ 阶）使得 $P^{-1}BP=P^TBP=D_1$ 为对角矩阵；
- 归纳证明：取 A 的特征值 λ_1 和及其特征向量 η，令 $\eta_1=\eta/\|\eta\|$（单位向量），将它扩张为规范正交向量组：

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_n,\qquad Q_1=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$$

Q_1 是正交矩阵，$Q_1^TAQ_1$ 对称，而且

实对称矩阵的正交对角化（续）

$$(symmetric \ \rightarrow) \quad Q_1^T A Q_1 = B = \begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \\ \vdots \\ \eta_n^T \end{pmatrix} \overbrace{\underbrace{(A\eta_1, A\eta_2, \cdots, A\eta_n)}_{=(\lambda_1\eta_1, A\eta_2, \cdots, A\eta_n)}}^{AQ_1 = A(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)}$$

$$(A\eta_1 = \lambda_1\eta_1 \ \Rightarrow) = \begin{pmatrix} \lambda_1\eta_1^T\eta_1 & * & \cdots & * \\ \lambda_1\eta_2^T\eta_1 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1\eta_n^T\eta_1 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n \ orthonormal \quad \Rightarrow \quad \eta_1^T\eta_1 = 1, \ \eta_2^T\eta_1 = \cdots = \eta_n^T\eta_1 = 0$$

实对称矩阵的正交对角化（续）

$$\underbrace{Q_1^T A Q_1 = B}_{symmetric} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$\overbrace{B_{22} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1),\ real\ \ symmetric}}^{P_1^T B_{22} P_1^T = D_1\ \ diagonal,\ P_2\ \ orthonormal} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

实对称矩阵的正交对角化（续）

$$P_1^T B_{22} P_1 = D_1 = diag(\lambda_2, \cdots, \lambda_n), \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$$

$$Q_2^T Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1^T P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix} = E_n$$

$$\overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}}_{P_1^T B_{22} P_1 = D_1,\ Q = Q_1 Q_2 \ orthonormal}}^{(Q_1 Q_2)^T A (Q_1 Q_2) = Q_2^T (Q_1^T A Q_1) Q_2 = D \ diagonal} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

实对称矩阵的对角化（续，怎么做？）

- 计算对称 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的互异（实）特征值：$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$；
- 对每一个 λ_j，计算 $(\lambda_j E-A)x=0$ 基本解组

$$\underbrace{\xi_{j,1},\ \cdots,\ \xi_{j,m_j}}_{m_j=\ algebraic\ \ index} \quad \xrightarrow{\quad orthonormalization\quad} \cdots \to \cdots \to \quad \underbrace{\eta_{j,1},\ \cdots,\ \eta_{j,m_j}}_{orthonormal}$$

$$\underbrace{(\overbrace{\eta_{1,1},\ \cdots,\ \eta_{1,m_1}}^{w.r.t.\ \lambda_1},\ \overbrace{\eta_{2,1},\ \cdots,\ \eta_{2,m_2}}^{w.r.t.\ \lambda_2},\ \cdots\cdots,\ \overbrace{\eta_{k,1},\ \cdots,\ \eta_{j,m_k}}^{w.r.t.\ \lambda_k})}_{=:P\ \ square\ \ matrix\ \ (m_1+\cdots+m_k=n),\ \ P^TP=E}$$

$$P^TAP=diag(\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{m_1},\ \underbrace{\lambda_2,\cdots,\lambda_2}_{m_2},\ \cdots,\ \underbrace{\lambda_k,\cdots,\lambda_k}_{m_k})$$

实对称矩阵的对角化（续，概要）

对称矩阵 A 可对角化：有正交阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 对角。

- A 有互异实特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$：

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

- 每一个 λ_j 有规范正交的基本解组 $\eta_{j,1}, \cdots, \eta_{j,m_j}\}$，$(m_j = n_j)$；
- $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$\{\eta_{i,1}, \cdots, \eta_{i,m_i}\} \quad \perp \quad \{\eta_{j,1}, \cdots, \eta_{j,m_j}\}$$

- k 个规范正交的基本解组拼合为一个正交（方）矩阵 P，P^TAP 对角。

实对称矩阵的对角化（续，例 4.5.3）

例 4.5.3A 是 3 阶实对称矩阵，$r(A)=2$，$\lambda=6$ 是二重特征值，$\alpha_1=(1,0,1)^T$ 与 $\alpha_2=(1,3,-2)^T$ 是属于 λ 的特征向量，求 A。

解：$\lambda_1=\lambda_2=6$。$r(A)=2<3$，故 $|A|=0$，A 有特征值 $\lambda_3=0$，其特征向量 α_3 正交于 $\lambda_1=lambda_1$ 的特征向量，因此满足

$$\begin{cases}\alpha_1^T x=0\\ \alpha_2^T x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\1&3&-2\end{pmatrix}x=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$A\overbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}^{=:P\ \ invertible}=\overbrace{(6\alpha_1,6\alpha_2,0\cdot\alpha_3)}^{=:B\ \ known} \quad\Rightarrow\quad A=BP^{-1}$$